Перетворення виразів

При розв’язуванні майже будь-якої задачі доводиться виконувати ті чи інші перетворення. Найчастіше складність самої задачі повністю визначається рівнем складності та обсягом перетворень, які потрібно виконати.

Приклади на перетворення числових і алгебраїчних виразів важливі не самі по собі, а як засіб розвитку техніки, математичної культури перетворень. Надзвичайно важливо навчитися «бачити закономірності» у завданні та можливі шляхи перетворення. Для того, щоб набути такого уміння, потрібен досвід, здобутий на практиці й знання основних формул. Здебільшого будемо перетворювати вирази, що містять символьні величини.

Найперше, що потрібно знати для оволодіння мистецтвом перетворення виразів – це формули скороченого множення – їх лише 7. Людина здатна пам’ятати про 7 речей (без додаткових тренувань пам’яті), тому нехай ці 7 формул займуть належне місце у вашій пам’яті.

Формули скороченого множення

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$;

4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$;

5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$;

6) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$;

7) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

Повторю твердження, сформульоване стосовно формул для логарифмів – їх можна читати зліва направо і справа наліво, тому обидві частини формули варто «помічати».

Приклад. Спростити вираз $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

У чисельнику права частина квадрата суми, у лівій – різниці квадратів.

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Приклад. Спростити вираз $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\left(\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)\right)$

Спочатку виконуємо дії в дужках, потім дію ділення. Для зручності розв’язання можна розділити на дії та виконувати їх по черзі окремо, щоб не переписувати громіздкий вираз.

1) $\dfrac{a}{a+1}+1 = \dfrac{a+a+1}{a+1} = \dfrac{2a+1}{a+1}$;

2) $1-\left(\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right) = \dfrac{1-a^2-3a^2}{1-a^2} = \dfrac{1-4a^2}{1-a^2}$;

При діленні дробів виконуємо множення на перевернутий другий дріб і розклад на множники

3) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\left(\frac{3a^2}{1-a^2}\right)\right)=\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{1-a^2}{1-4a^2}=$

$=\frac{\cancel{2a+1}}{\cancel{a+1}}\cdot\frac{(1-a)\cancel{(1+a)}}{(1-2a)\cancel{(1+2a)}}=\frac{1-a}{1-2a}$.

Приклад. Спростити вираз

$$\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right)$$

Перш ніж починати розв'язувати задачу, тобто виконувати перетворення, потрібно знайти закономірності в записі умови – це допоможе правильно побудувати план виконання перетворень і зменшить кількість зайвих кроків, тобто перетворення призведуть до спрощення виразу, а не до його ускладнення.

Звернемо увагу на вирази $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ і $a^3-a^2b+ab^2-b^3$ - вони по-перше схожі між собою, а по-друге, їх легко розкласти на множники групуванням:

$a^3+a^2b+ab^2+b^3=a^2(a+b)+b^2(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)$;

$a^3-a^2b+ab^2-b^3=a^2(a-b)+b^2(a-b)=(a-b)(a^2+b^2)$.

1) $\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}=\frac{a^2+ab}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{b}{a^2+b^2}=\frac{a\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}(a^2+b^2)}+\frac{b}{a^2+b^2}=$

$=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{a^2+b^2}$;

2) $\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}=\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}=\frac{a^2+b^2-2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}=$

$=\frac{(a-b)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-b)}(a^2+b^2)}=\frac{a-b}{a^2+b^2}$

3) $\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right)=\frac{a+b}{a^2+b^2}:\frac{a-b}{a^2+b^2}=$

$=\frac{a+b}{\cancel{a^2+b^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2+b^2}}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}$.

Перетворення ірраціональних виразів

Якщо у формулах скороченого множення замінити величини на ірраціональні, то отримаємо формули для перетворення ірраціональних виразів.

Приклад. Обчислити значення виразу: $\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}$

Розглянемо 2 способи обчислення – перетворення квадратного кореня на корінь четвертого степеня та виділення повного квадрату під коренем четвертого степеня, щоб перетворити його на корінь квадратний.

Спосіб перший.

$\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}=\sqrt[4]{\left(2\sqrt{3}-2\right)^2}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}=$

$=\sqrt[4]{12-8\sqrt{3}+4}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}=\sqrt[4]{16-8\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}=$

$$=\sqrt[4]{8\left(2-\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt[4]{2\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt[4]{16\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=2$$

Спосіб другий.

$$\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[4]{3+1+2\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2\left(\sqrt{3}-1\right)}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-1}=2.$$

Приклад. Спростити вираз

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$$

Розглянемо чисельник першого дробу. $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$, його можна перетворити до вигляду $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3$. Застосовуємо формулу суми кубів:

$$\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=$$

$$=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)$$

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{\cancel{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}-\sqrt{ab}=$$

$$=a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}=a-2\sqrt{ab}+b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2.$$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}=\frac{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cancel{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=1.$$

Однією з традиційних задач на перетворення ірраціональних виразів є задача на звільнення від ірраціональності. Потрібно перетворити вираз до вигляду, щоб в знаменнику не було ірраціональних чисел, тобто коренів. Для досягнення цієї мети виконують множення на так званий спряжений вираз. Вигляд виразу, спряженого до заданого, задається формулами скороченого множення – формулами різниці квадратів, суми і різниці кубів. У складніших випадках доводиться множити кілька разів.

Приклад. Звільнитись від ірраціональності в знаменнику дробу

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Приклад. Звільнитись від ірраціональності в знаменнику дробу

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}=2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{18}$$

Формула бінома Ньютона

Біном в перекладі – двочлен.

Корисні формули:

1) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$;

2) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+x^2(a+b+c)+x(ab+ac+bc)+abc$;

3) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+x^3(a+b+c+d)+$
$+x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+x(abc+abd+acd+dbc)+abcd$.

Біноміальна формула Ньютона:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}.$$

$$(a+b)^n=C_n^0a^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+C_n^2a^2b^{n-2}+....+C_n^na^nb^0$$

$\sum$ означає суму елементів (чисел, виразів); $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ - біноміальні коефіцієнти.

Вираз $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot2\cdot1$ називають ***факторіалом*** числа n.

$0!=1;\quad 1!=1;\quad 2!=2\cdot1=2;\quad ...$

Біноміальні коефіцієнти зручно знаходити з ***трикутника Паскаля.***

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Кожен наступний рядок здобувають, додаючи числа попереднього рядка, які розташовані зверху (сума двох чисел).

Властивості біноміальних коефіцієнтів.

1) $C_n^0=C_n^n, C_n^1=C_n^{n-1}, C_n^2=C_n^{n-2},..., C_n^k=C_n^{n-k}$ – рівновіддалені від кінців коефіцієнти рівні.

2) $C_n^{k+1}=\dfrac{n-k}{k+1}C_n^k$; 3) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$;

4) В розкладі $(a+b)^n$ рівно $n+1$ доданків.

$T_{k+1}=C_n^ka^kb^{n-k}$ називають ***загальним членом*** розкладу.

Приклад. $\left(\sqrt{x}+1\right)^6=\left(\sqrt{x}\right)^6+6\left(\sqrt{x}\right)^5+15\left(\sqrt{x}\right)^4+20\left(\sqrt{x}\right)^3+15\left(\sqrt{x}\right)^2+6\sqrt{x}+1=$
$=x^3+6x^2\sqrt{x}+15x^2+20x\sqrt{x}+15x+6\sqrt{x}+1.$

Приклад. У розкладі $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{14}$ обчислити коефіцієнт при x^2.

$$\left(\sqrt[4]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{14}=\sum_{k=0}^{14}C_{14}^{k}\left(\sqrt[4]{x}\right)^{k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{14-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{14}C_{14}^{k}x^{\frac{k}{4}}2^{14-k}x^{-\frac{14-k}{2}}=\sum_{k=0}^{14}2^{14-k}C_{14}^{k}x^{\frac{3k-28}{4}}$$

$\frac{3k-28}{4}=2\Rightarrow k=12$.

Коефіцієнт: $2^{14-12}\cdot C_{14}^{12}=4\cdot\frac{14!}{12!\cdot 2!}=4\cdot\frac{14\cdot 13}{2}=364$.

Відповідь: 364.

Приклад. Знайти остачу від ділення 17^{2014} на 3.

$$17^{2014}=(15+2)^{2014}=15^{2014}+C_{2014}^{1}\cdot 15^{2013}\cdot 2^{1}+\ldots+C_{2014}^{2013}\cdot 15^{1}\cdot 2^{2013}+2^{2014}.$$

$$2^{2014}=4^{1007}=(3+1)^{1007}=3^{1007}+C_{1007}^{1}\cdot 3^{1006}+\ldots+C_{1007}^{1006}\cdot 3+1.$$

Відповідь: 1.

Приклад. Знайти член розкладу, який містить a і b в однакових степенях:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}.$$

Введемо позначення: $T_{k+1}=C_{21}^{k}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{k}\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21-k}=C_{21}^{k}\cdot\frac{b^{\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{6}}}\cdot\frac{a^{\frac{21-k}{3}}}{b^{\frac{21-k}{6}}}=$

$$=C_{21}^{k}\cdot a^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}}\cdot b^{\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6}}=C_{21}^{k}\cdot a^{\frac{42-3k}{6}}\cdot b^{\frac{4k-21}{6}}.$$

За умовою, $\frac{42-3k}{6}=\frac{4k-21}{6}$ або $k=9$.

Отже, $T_{10}=C_{21}^{9}\cdot a^{\frac{5}{2}}\cdot b^{\frac{5}{2}}=1763580a^{2}\sqrt{a}b^{2}\sqrt{b}$.

Розглянемо кілька типів задач на **перетворення виразів, що містять логарифми**. У більшості із них задача істотно спрощується, якщо перейти до однієї основи.

Приклад. Виразити b через a. $a=\log_{36}8, b=\log_{36}9$.

Зверніть увагу на те, що логарифми мають однакову основу, тому можна виконати додавання або віднімання логарифмів.

$\log_{36}8=3\log_{36}2;\quad \log_{36}9=2\log_{36}3$ або $\frac{a}{3}=\log_{36}2;\quad \frac{b}{2}=\log_{36}3$.

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\log_{36}2+\log_{36}3=\log_{36}6=\frac{1}{2}$$

$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{2}$, тому $\frac{b}{2}=\frac{1}{2}-\frac{a}{3}$, звідки $b=1-\frac{2}{3}a$.

Приклад. Спростити вираз:

$$\frac{\left(\log_a b-\log_b \frac{a}{b}\right)\log_a ab}{\log_a^3 b+1}$$

Перетворимо кожен множник за формулами скороченого множення і властивостями логарифмів. У знаменнику сума кубів – розкладемо її на множники:

$$\log_a^3 b+1=\left(\log_a b+1\right)\left(\log_a^2 b-\log_a b+1\right)$$

$$\log_b \frac{a}{b}=\log_b a-\log_b b=\log_b a-1=\frac{1}{\log_a b}-1$$

$$\log_a b-\log_b \frac{a}{b}=\log_a b+\frac{1}{\log_a b}-1=\frac{\log_a^2 b-\log_a b+1}{\log_a b}$$

$$\log_a ab=\log_a a+\log_a b=1+\log_a b.$$

$$\frac{\left(\log_a b-\log_b \frac{a}{b}\right)\log_a ab}{\log_a^3 b+1}=\frac{\frac{\cancel{\log_a^2 b-\log_a b+1}}{\log_a b}\cdot\cancel{\left(1+\log_a b\right)}}{\cancel{\left(\log_a b+1\right)}\cancel{\left(\log_a^2 b-\log_a b+1\right)}}=\frac{1}{\log_a b}=\log_b a.$$

Приклад. Обчислити $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{99}100$.

Перейдемо в усіх логарифмах до основи 2 (найменшої з присутніх у задачі)

$$\cancel{\log_2 3}\cdot\frac{\cancel{\log_2 4}}{\cancel{\log_2 3}}\cdot\frac{\cancel{\log_2 5}}{\cancel{\log_2 4}}\cdot\frac{\cancel{\log_2 6}}{\cancel{\log_2 5}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{\log_2 99}}{\cancel{\log_2 98}}\cdot\frac{\log_2 100}{\cancel{\log_2 99}}=\log_2 100.$$

Приклад. Обчислити $\frac{\log_3 12}{\log_{36}9}-\frac{\log_3 2}{\log_{108}3}$

Зверніть увагу на закономірності в умові задачі – присутні два логарифми з основою 3, а у інших двох присутні 9 або 3 – можна перейти до основи 3. Зручніше перетворювати вирази, коли усі логарифми мають однакові основи. Скористаємося наслідками з формулами переходу до іншої основи: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

$$\frac{\log_3 12}{\log_{36} 9} - \frac{\log_3 2}{\log_{108} 3} = \log_3 12 \cdot \log_9 36 - \log_3 2 \cdot \log_3 108 =$$

$$= \log_3 12 \cdot \log_{3^2} 6^2 - \log_3 2 \cdot \log_3 (4 \cdot 27) =$$

$$= \log_3 \left(2^2 \cdot 3\right) \cdot \log_3 (2 \cdot 3) - \log_3 2 \cdot \log_3 \left(2^2 \cdot 3^3\right) =$$

Перетворимо усі вирази до найпростішого вигляду

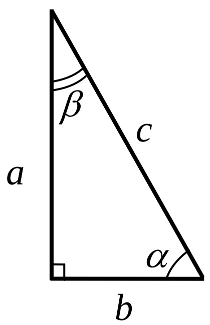
$$= \left(2\log_3 2 + 1\right) \cdot \left(\log_3 2 + 1\right) - \log_3 2 \cdot \left(2\log_3 2 + 3\right) =$$

Розкриваємо дужки

$= 2\log_3^2 2 + 3\log_3 2 + 1 - 2\log_3^2 2 - 3\log_3 2 = 1$ - після спрощень отримуємо.

Тригонометричні вирази

Ввести поняття тригонометричних функцій найзручніше за допомогою прямокутних трикутників.



Нехай катети прямокутного трикутника - a, b, проти них кути α, β відповідно, гіпотенуза - c.

Запишемо означення тригонометричних функцій для кута α:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ tg\alpha = \frac{a}{b};\ ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

Аналогічно для кута β:

$$\sin\beta = \frac{b}{c};\ \cos\beta = \frac{a}{c};\ tg\beta = \frac{b}{a};\ ctg\beta = \frac{a}{b}.$$

Із властивостей прямокутного трикутника можна отримати кілька дуже важливих властивостей тригонометричних функцій. $\alpha + \beta = 90^\circ$ або $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, α, β - гострі кути. Наприклад: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \cos\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Прямокутний трикутник буде використовуватися для спрощення розв’язання та сприйняття деяких задач з тригонометрії.

Для тригонометричних функцій слід вивчити основні формули та властивості.

Таблиця градусної та радіанної мір кута

Градуси	0	15	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Радіани	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

$f(\alpha)$	α, рад							
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
$ctg\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує	0	не існує

Формули зведення

$f(\alpha)$	α						
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$
$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$

Парність та непарність функцій

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha;\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$tg(-\alpha)=-tg\alpha;\ ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$$

Основні тотожності

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \alpha\neq\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1;\ \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ \ n\in\mathbb{Z}$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha};\ \alpha\neq\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$$

Формули для суми аргументів (теореми додавання)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta};$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta};\ \alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta};$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha};\ \alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

Формули кратних аргументів

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\quad n,k\in\mathbb{Z}$$

$$ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha};\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Формули пониження степеня (запишемо тільки для синуса і косинуса).

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Перетворення суми в добуток.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\ tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};\ ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};\ \alpha,\beta \neq \pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Перетворення добутку в суму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right).$$

При спрощенні виразів, що містять тригонометричні функції варто виконати перетворення, в результаті яких всі функції будуть мати один аргумент.

Приклад 1. Спростити вираз:

$$\left(1-\cos^2\alpha\right)ctg^2\alpha$$

Скористаємося основними тотожностями: $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$; $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

$$\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot ctg^2\alpha = \cancel{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cancel{\sin^2\alpha}} = \cos^2\alpha.$$

Приклад 2. $\dfrac{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)}$

Скористаємося формулами зведення: $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$; $tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$;

$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$.

$$\frac{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)} = \frac{-ctg\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha} = -ctg\alpha\cdot tg\alpha = -1.$$

Приклад 3. $\dfrac{1-\cos4\alpha}{4tg^2 2\alpha}+\dfrac{1+\cos4\alpha}{4ctg^2 2\alpha}$.

Оскільки в умові присутні 2 види аргументів, то для спрощення перетворимо їх до одного виду. Наприклад, функції з аргументом 4α можна перетворити у функції з аргументом 2α. Або скористатися формулами пониження степеня.

Якщо у формулі $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ замінити α на 4α, то отримаємо

$\sin^2 2\alpha = \dfrac{1-\cos4\alpha}{2}$ або $1-\cos4\alpha = 2\cdot\sin^2 2\alpha$. Аналогічно, $1+\cos4\alpha = 2\cdot\cos^2 2\alpha$.

$$\frac{1-\cos4\alpha}{4tg^2 2\alpha}+\frac{1+\cos4\alpha}{4ctg^2 2\alpha} = \frac{2\cdot\sin^2 2\alpha}{4tg^2 2\alpha}+\frac{2\cdot\cos^2 2\alpha}{4ctg^2 2\alpha} =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin^2 2\alpha}{tg^2 2\alpha}+\frac{\cos^2 2\alpha}{ctg^2 2\alpha}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cancel{\sin^2 2\alpha}}{\frac{\cancel{\sin^2 2\alpha}}{\cos^2 2\alpha}}+\frac{\cancel{\cos^2 2\alpha}}{\frac{\cancel{\cos^2 2\alpha}}{\sin^2 2\alpha}}\right)=$$

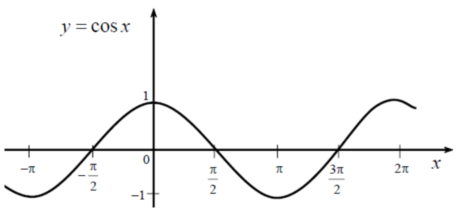
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)=\frac{1}{2}.$$

Обчислення значень тригонометричних функцій

Приклади. Обчислити:

1. Обчислити $4\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Межі для кута α дозволяють визначити знак тригонометричної функції, значення якої шукаємо. Знак легко визначати, якщо пам'ятати вигляд графіка тригонометричної функції.



При $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, графік функції $y=\cos x$ розташований нижче осі Ox, тому $4\cos\alpha<0$ при $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Виразимо значення косинуса через синус за основною тотожністю: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

В нашому випадку $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

$$4\cos\alpha=-4\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-4\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=-4\cdot\sqrt{1-\frac{7}{16}}=-4\cdot\sqrt{\frac{9}{16}}=-4\cdot\frac{3}{4}=-3.$$

2. Обчислити $tg\alpha$, якщо $tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-2$.

Скористаємося формулою $tg\left(\alpha-\beta\right)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$ і таблицею значень тригонометричних функцій: $tg\frac{\pi}{4}=1$.

$$tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\alpha}{1+tg\frac{\pi}{4}tg\alpha}=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}.$$

$\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}=-2$ - можна знайти $tg\alpha$, розв'язавши рівняння відносно нього.

$1-tg\alpha=-2\left(1+tg\alpha\right)$

$1-tg\alpha=-2-2tg\alpha$

$tg\alpha=-3.$

У деяких задачах для знаходження значення потрібно виконати додаткові перетворення – почленно поділити, піднести до квадрата.

3. Обчислити $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{3}{5}$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Такий вираз можна отримати, якщо піднести до квадрату різницю функцій: $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{9}{25}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{16}{25}.$$

4. Обчислити $ctg\alpha$, якщо $3\cos\alpha - 2\sin\alpha = 4\cos\alpha + \sin\alpha$.

$$-\cos\alpha = 3\sin\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -3 \Rightarrow ctg\alpha = -3.$$

Приклади на знаходження періоду

Найменший додатний період функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$: $T = 2\pi$; функцій $y = tgx$, $y = ctgx$: $T = \pi$.

Якщо функція виглядає $y = A\cos(\omega x + \varphi) + B$ або $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$, то її найменший додатний період знаходять за формулою: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, тобто на період впливає тільки величина, що множиться на змінну x.

Якщо функція має вигляд $y = A \cdot tg(\omega x + \varphi) + B$ або $y = A \cdot ctg(\omega x + \varphi) + B$, то її найменший додатний період знаходять за формулою: $T = \frac{\pi}{\omega}$.

Якщо функція є сумою періодичних функцій, то її період дорівнює НСК періодів доданків.

Приклади. Знайти найменший додатний період функції.

1. $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} + 5\right)$.

$\omega = \frac{1}{2}$, тому $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

2. $y = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{4}$.

Знаходимо періоди доданків: $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$; $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$. Отже, $T = 24\pi$.

3. $y = tg2x - 5\sin\frac{x}{3} + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

$T_1 = \frac{\pi}{2}$; $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$; $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Оскільки $6\pi = \frac{\pi}{2} \cdot 12$ і $6\pi = \frac{2\pi}{3} \cdot 9$, тобто включає їх цілу кількість разів, то $T = 6\pi$.

Обернені тригонометричні функції

Зрозуміти, що таке, наприклад, арксинус x досить просто. Це кут (в радіанах), синус якого рівний x. З точки зору функцій це дія, обернена до синуса. Аналогічно для інших функцій. Кожна з них має свої властивості. Найважливіші варто запам'ятати.
Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями.

$\sin(\arcsin x) = x,\ \cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1;1]$

$tg\left(arctgx\right) = x,\ ctg\left(arcctgx\right) = x,\ x \in \mathbb{R}$

$\arcsin\left(\sin x\right) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\ \arccos\left(\cos x\right) = x,\ x \in [0;\pi].$

$arctg\left(tgx\right) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);\ arcctg\left(ctgx\right) = x,\ x \in (0;\pi)$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1;1];\ arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R}$

$\arcsin\left(-x\right) = -\arcsin x,\ \arccos(-x) = \pi - \arccos(x),\ x \in [-1;1]$

$arctg\left(-x\right) = -arctgx,\ arcctg(-x) = \pi - arcctgx,\ x \in \mathbb{R}.$

Приклад. Обчислити $arctg1 - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$.

Обчислимо окремо кожен доданок.
Скористаємося таблицею значень тригонометричних функцій:

$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow arctg1 = \frac{\pi}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$arcctg\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - arcctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$

Отже, $arctg1 - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - arcctg\left(-\sqrt{3}\right) =$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}.$

Приклад. Обчислити: $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Оскільки $\frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, то скористатися формулою $\arcsin\left(\sin x\right) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ одразу не вдається. Доведеться виконати додаткові перетворення.

$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$, за формулами зведення.

Отже $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Приклад. Обчислити $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)$. Скористаємося формулою:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)=$

$=\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\sin\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)=$

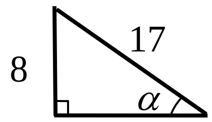
$=\frac{3}{5}\cdot\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{8}{17}$.

Розглянемо один із раціональних способів обчислення значень тригонометричних функцій від обернених тригонометричних – за допомогою «**прямокутного трикутника**».

Для прикладу обчислимо $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$.

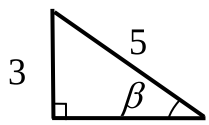
Позначимо $\alpha=\arcsin\frac{8}{17}$ - кут, синус якого рівний $\frac{8}{17}$. $\sin\alpha=\frac{8}{17}$.

Згадаємо означення синуса – це відношення катета, протилежного куту, до гіпотенузи. Оскільки йдеться про відношення, то можна вважати, катет рівний 8, а гіпотенуза 17. За теоремою Піфагора інший катет: $\sqrt{17^2-8^2}=15$.



У задачі потрібно знайти $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$, тобто $\cos\alpha$, тобто відношення прилеглого катета до гіпотенузи, а воно дорівнює $\frac{15}{17}$, отже, $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)=\frac{15}{17}$.

Аналогічно обчислимо $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$. Для цього будуємо інший прямокутний трикутник з гострим кутом $\beta=\arcsin\frac{3}{5}$ і катетом 3 та гіпотенузою 5 (або 6 і 10 відповідно).

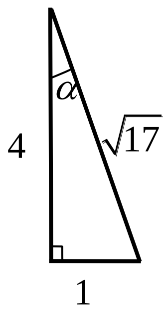


Другий катет: $\sqrt{5^2-3^2}=4$. Отже, $\cos\beta=\frac{4}{5}$.

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}+\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5}=\frac{45+32}{85}=\frac{77}{85}.$$

Розглянемо $arctg\frac{1}{4}$ і представимо його через інші обернені тригонометричні функції (це буває потрібно в задачах для зручності обчислення).

Розглянемо прямокутний трикутник з катетами 1 і 4. (1 – протилежний куту α)



Гіпотенуза за теоремою Піфагора: $\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

Запишемо всі тригонометричні функції для кута α.

$tg\alpha=\frac{1}{4}$; $ctg\alpha=4$; $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Отже, $\alpha=arctg\frac{1}{4}=arcctg4=\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}=\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Якщо потрібно обчислити, наприклад, $\sin\left(arctg\frac{1}{4}\right)$, то скористаємося рівністю

$arctg\frac{1}{4}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$, тоді $\sin\left(arctg\frac{1}{4}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\frac{1}{\sqrt{17}}$